Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Exercice 1

$a, b, d \in Z$ avec $d \neq 0$ Montrer que $a|b \iff da|db$

Exercice 2

Pour tout a relatif et b naturel non nul déterminer q et r tels que $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$

1. $a = 153$ et $b = 31$
2. $a = -153$ et $b = 31$

Exercice 3

Pour le code INSEE justifier que $K + R$ est un multiple de 97

Exercice 4

Vrai ou faux ? Pour tout entier naturel n, le chiffre des unités de $n^2 + n$ n'est jamais égal à 4

Exercice 5

1. Déterminer tous les entiers n naturels non nuls tels que $n + 1|n^2 + 1$ (On pourra utiliser $n^2 + 1 = (n + 1)(n - 1) + 2$ pour tout n entier)
2. Déterminer tous les entiers relatifs tels que $n + 1|n^2 + 1$

Exercice 6

1. Déterminer tous les entiers n relatifs tels que $n - 1|n^3 - 1$
2. Déterminer tous les entiers relatifs tels que $n+1|n^3-1$(On pourra utiliser $n^3-1 = (n + 1)(n^2 - n + 1) - 2$ pour tout n entier)

Exercice 7

1. Donner l'ensemble des diviseurs de 360. Combien sont ils ?
2. Décomposer 360 en facteurs premiers $360 = \prod p_i^{\alpha_i}$ et conjecturer une formule pour dénombrer les diviseurs à partir de α_i

Exercice 8

Un nombre est dit parfait si il est égal à la somme de ses diviseurs excepté lui-même, par exemple 6 car

$6 = 1 + 2 + 3$

1. Montrer que 28 est parfait
2. Montrer que si $2^n - 1$ est premier alors $2^{n-1}(2^n - 1)$ est parfait

Exercice 9

Jeu de Nim

40 allumettes sont disposés sur la table. Deux joueurs prennent chacun à tour de rôle une, deux, trois ou quatre allumettes. Celui qui prend la dernière allumette perd la partie.

Il existe une stratégie gagnante pour le joueur qui commence. Expliquer cette stratégie

Exercice 10

Montrer que parmi 5 entiers il y a toujours 3 dont la somme est divisible par 3

Exercice 9 (critères de divisibilité)

Soit $n \in \mathbb{N}$ son écriture décimale est $n = \sum_{i=0}^{i=n} a_i 10^i$

1. Montrer que la somme des chiffres de n est congru modulo 9 au reste de la division par 9 de n
2. En remarquant que $10 \equiv 1[3]$ énoncer une règle de divisibilité par 3 d'un entier n
3. En remarquant que $10 \equiv 1[9]$ énoncer une règle de divisibilité par 9 d'un entier n
4. En remarquant que $10 \equiv -1[11]$ en déduire que $10^{2k} \equiv 1[11]$ et $10^{2k+1} \equiv -1[11]$ puis en déduire une règle de divisibilité par 11 d'un entier n en utilisant les notations suivantes :

   On note S_{2k} la somme des chiffres de rang pair de n et S_{2k+1} la somme des chiffres de rang pair de n

Exercice 10

Si $a \equiv b\ [n]$ et $m|n$ avec $m > 0$ alors $a \equiv b\ [m]$

A-t-on $a \equiv b\ [n]$ si $a \equiv b\ [m]$ et $m|n$?

Exercice 11

1. Démontrer pour tout entier naturel n on $2^{3n} \equiv 1[7]$
2. En déduire que $2^{33} - 1$ est divisible par 7. (Une autre façon de faire est de considérer que $x^{11} - 1 = (x-1)(x^{10} + x^9 + ... + x^2 + x + 1)$)
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2018^{2019} par 7

Exercice 12

On définit par récurrence la suite de Sylvester par $s_1 = 3$ et $s_n = s_{n-1}(s_{n-1} - 1) + 1$

1. Calculer s_2, s_3 et s_4
2. On note l_n la suite étant égale au nombre de chiffres de s_n que peut on conjecturer à propos de l_n
3. Ecrire un algorithme puis un programme Python pour calculer le nième terme de cette suite
4. Démontrer par récurrence : $\forall n \geqslant 2$ on a $s_n \equiv 7[9]$

Exercice 13

1. a entier $\geqslant 2$ et m et n deux entiers $\geqslant 1$ montrer que $m|n \iff a^m - 1|a^n - 1$
2. Montrer que $2^{2018} - 1$ est divisible par 3
3. Prouver le résultat précédent avec les congruences modulo 3
4. Montrer que si n n'est pas premier alors $2^n - 1$ non plus

Exercice 14

1. Prouver que pour tout n entier $a - b|a^n - b^n$
2. Prouver que pour tout n impair $a + b|a^n + b^n$
3. Montrer que $2^{2017} + 1$ est un multiple de 3
4. Prouver le résultat précédent avec les congruences modulo 3
5. prouver que si n a un diviseur impair alors $2^n + 1$ n'est pas premier

Exercice 15
Montrer que 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ pour tout $n \geqslant 0$
Exercice 16

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7
   En déduire que $2^{3n+1} - 2$ et $2^{3n+2} - 4$ sont des multiples de 7
2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on considère $N_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$
   (a) Si $p = 3n$ quel est le reste de la division de N_p par 7 ?
   (b) Démontrer que si $p = 3n + 1$ alors N_p est divisible par 7
   (c) Etudier le cas où $p = 3n + 2$

Exercice 17

1. Montrer que $6|n^3 + 5n$ pour tout n
2. Montrer que $30|n^5 - n$ pour tout n
3. Trouver tous les entiers n tel que $120|n^5 - n$

Exercice 18
Démontrer que $3|a^2 + b^2 \iff 3|a$ et $3|b$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$
Exercice 19
Démontrer que si $7|a^2 + b^2$ alors $7|a$ et $7|b$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$
Exercice 20
Montrer que 2^n ne divise jamais $n!$
Exercice 21
Montrer que $13|2^{70} + 3^{70}$
Exercice 22
Déterminer tous les entiers relatifs x différents de 3 tels que $x - 3|x^3 + 1$
Exercice 23
Montrer que $11 \times 31 \times 61$ divise $20^{15} - 1$
Exercice 24
Quel est le reste de la division par 7 de $2017^{7102} + 7102^{2017}$?
Exercice 25
Montrer que le chiffre des unités de $1 + 4 + 4^2 + ... + 4^n$ vaut 1 si n est pair et 5 si n est impair
Exercice 26
Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}\ \ 19|2^{2^{6k+2}} + 3$
Exercice 27
Déterminer le chiffre des unités et des dizaines de 2^{1000}
Exercice 28
Montrer que 21 divise $2^{4^n} + 5$ pour tout $n \geqslant 1$
Montrer que 7 ne divise jamais $2^n + 1$
Exercice 29
Justifier que $n^5 + n^4 + 1$ est composé pour tout $n > 1$
Exercice 30
Montrer que tous les nombres de la forme 12008, 120308, 1203308, ... sont divisibles par 19

Exercice 31

Enigme du journal Le Monde : Affaire de logique 23/08/17

François, mathématicien fasciné par les grands nombres, en a trouvé un doté d'une propriété tout à fait étonnante ? : si on écrit un « 1 » à la gauche et un « 1 » à la droite de cet entier naturel de moins de 100 chiffres, alors on obtient un nombre 99 fois plus grand que lui.

1. Donner les 9 derniers chiffres de ce nombre
2. Donner le nombre de chiffres de ce nombre

Exercice 32

1. Démontrer l'identité de Sophie Germain :

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$$

2. Démontrer que si $n > 1$ alors $n^4 + 4^n$ n'est pas premier

Exercice 33

Montrer que $3n - 1$, $5n - 2$, $5n + 2$, $7n - 1$, $7n - 2$ et $7n + 3$ ne sont pas des carrés

Exercice 34

Montrer qu'il existe une infinité d'entiers $n > 0$ tel que $n|2^n + 2$

Exercice 35

Montrer qu'il n'existe pas d'entiers $n > 1$ tel que $n|2^n - 1$

Exercice 36

Montrer que si n entier $\geqslant 1$ et impair alors $n|2^{n!} - 1$

Exercice 37

Montrer que $641|2^{32} + 1$

Exercice 38

Soit $S(n)$ la somme des chiffres de n. Montrer que si $S(n) = S(2n)$ alors $9|n$

Exercice 39

Le nombre $aabb$ est un carré. Trouver a et b