Ex n°1 (4 points)

1. Calculer le pgcd d de 539 et 42 par l'algorithme d'Euclide
2. En déduire une expression de d comme combinaison linéaire de 539 et 42

Ex n°2 (6 points)

Une feuille de papier millimétré est un ensemble de droites parallèles verticales et horizontales tracées tous les millimètres.

Les points d'intersection des droites verticales et horizontales forment ce qu'on appelle un réseau de points.

Le quadrillage forme un rectangle de longueur de 210 mm et de largeur 175 mm.

On trace une diagonale de ce rectangle, le but de cet exercice est de trouver le nombre de points du réseau en dehors des deux extrémités se trouvant sur cette diagonale.

1. Un des points de la diagonale est choisi comme origine d'un repère orthonormé d'unité 1 mm de telle sorte que l'autre point de la diagonale a pour coordonnées (210 ;175) .
   Quelle est l'équation réduite de la droite formée par la diagonale ?
2. Montrer que résoudre le problème revient à compter les solutions de l'équation $5x = 6y$ avec $(x; y) \in \mathbb{N}^2$ et $0 < x < 210$
3. Résoudre le problème

Ex n°3 (8 points)

La suite de Sylvester est définie par $s_0 = 2$ et $s_{n+1} = s_n \times (s_n - 1) + 1$

Il s'agit de prouver quelques propriétés arithmétiques de cette suite

1. Calculer s_1, s_2 et s_3
2. Démontrer par récurrence que : Pour tout $n \geqslant 2$ on a $s_n \equiv 7$ [9].
   Reformuler cette propriété plus simplement.
3. Démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\dfrac{s_{n+1} - 1}{s_n - 1} = s_n$
4. Soit $Q_{n+1} = \dfrac{s_{n+1} - 1}{s_n - 1} \times \dfrac{s_n - 1}{s_{n-1} - 1} \times \dfrac{s_{n-1} - 1}{s_{n-2} - 1} \times ... \times \dfrac{s_2 - 1}{s_1 - 1} \times \dfrac{s_1 - 1}{s_0 - 1}$
   En simplifiant Q_{n+1} de deux façons différentes montrer que :
   $s_{n+1} - \prod\limits_{k=0}^{k=n} s_k = 1$
5. En déduire que deux termes quelconque de la suite de Sylvester sont premiers entre eux

Bonus

En prolongement de l'exercice précédent prouver :

S'il existe une suite (u_n) d'entiers telle que deux termes quelconque u_n et u_m sont premiers entre eux alors l'ensemble des nombres premiers est infini

A part la suite de Sylvester , connaissez vous une autre suite possédant cette propriété ?

Correction

Ex n°1

En utilisant l'algorithme d'Euclide :

$539 = 42 \times 12 + 35 \qquad (1)$

$42 = 35 \times 1 + 7 \qquad (2)$

$35 = 7 \times 5$

Le dernier reste non nul est 7 donc 7 est le pgcd de 539 et 42

De la ligne (2) on a : $7 = 42 - 35 \times 1$ et de la ligne (1) $35 = 539 - 42 \times 12$ on en déduit,

$7 = 42 - (539 - 42 \times 12) = -1 \times 539 + 13 \times 42$

Ex n°2

1. L'équation réduite cherchée est $y = \dfrac{175}{210}x = \dfrac{5}{6}x$
2. Compter les points à coordonnées entières de cette droite dans l'intervalle $]0; 210[$ (on ne prend pas en compte les extrémités) équivaut à compter les solutions de l'équation $5x = 6y$ avec x, y entiers naturels non nuls et $0 < x < 210$
3. Une solution particulière de cette équation est $x_0 = 6$ et $y_0 = 5$
   Donc l'ensemble des solutions $S = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 | 5x = 6y \ \ 0 < x < 210\}$ est non vide.
   Pour toute solution $(x; y)$, $5|5x = 6y$ or 5 et 6 sont premiers entre eux par conséquent d'après le Théorème de Gauss, on a $5|y$, ce qui signifie, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $y = 5k$
   De même il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $x = 6l$ et finalement $5(6l) = 6(5k)$ donc $k = l$
   Considérons maintenant $E = \{(6k; 5k) | k \in \mathbb{N} \ 0 < 6k < 210\}$ on a précédemment montré que $S \subset E$
   Or tout élément de E, $(6k; 5k)$ avec $k \in \mathbb{N} \ \ 0 < 6k < 210$ vérifie $5(6k) = 6(5k)$ donc appartient à S donc $E \subset S$ donc $S = E$
   Il nous reste à compter les éléments de E : $0 < 6k < 210 \iff 0 < k < 35$ donc 34 éléments pour k entier de 1 à 34

Ex n°3

1. $s_1 = 3$, $s_2 = 7$, $s_3 = 43$
2. (a) Initialisation : La propriété est vraie pour n = 2, en effet $s_2 = 7 \equiv 7 \ [9]$
   (b) Hérédité : Supposons la propriété vraie pour $k \geqslant 2$ c'est à dire $s_k \equiv 7 \equiv -2 \ [9]$ donc $s_k - 1 \equiv 7 - 1 \equiv 6 \equiv -3 \ [9]$ et $s_k(s_k - 1) \equiv -2 \times -3 \equiv 6 \ [9]$
   Finalement $s_{k+1} = s_k(s_k - 1) + 1 \equiv 6 + 1 \equiv 7 \ [9]$ donc la propriété est vraie pour le rang suivant
   (c) Conclusion : D'après l'axiome de récurrence la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 2$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a par définition $s_{n+1} = s_n \times (s_n - 1) + 1$
   donc $s_{n+1} - 1 = s_n \times (s_n - 1)$ donc $\dfrac{s_{n+1} - 1}{s_n - 1} = s_n$

4. $Q_{n+1} = \dfrac{s_{n+1}-1}{s_n-1} \times \dfrac{s_n-1}{s_{n-1}-1} \times \dfrac{s_{n-1}-1}{s_{n-2}-1} \times ... \times \dfrac{s_2-1}{s_1-1} \times \dfrac{s_1-1}{s_0-1} = \prod_{k=0}^{k=n} \dfrac{s_{k+1}-1}{s_k-1}$
   or $\dfrac{s_{k+1}-1}{s_k-1} = s_k$ donc $Q_{n+1} = \prod_{k=0}^{k=n} s_k$
   Par télescopage on a $Q_{n+1} = \dfrac{s_{n+1}-1}{s_0-1} = s_{n+1}-1$
   Donc $s_{n+1} - \prod_{k=0}^{k=n} s_k = 1$
5. Prenons maintenant deux termes quelconque de la suite de Sylvester s_m et s_n disons que $m > n$ dans ce cas d'après la relation précédente $s_m - \prod_{k=0}^{k=m-1} s_k = 1$ que l'on peut réécrire ainsi :

   $$s_m - (\prod_{k=0,k\neq n}^{k=m-1} s_k)s_n = 1$$

   On a explicité une combinaison linéaire de s_m et s_n qui vaut 1, par conséquent d'après le Théorème de Bezout , s_m et s_n sont premiers entre eux

Bonus

Soit (u_n) une suite d'entiers telle que deux termes quelconque u_n et u_m sont premiers entre eux . Montrons alors que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Supposons le contraire (raisonnement par l'absurde), et notons p_1, p_2,...,p_m les m nombres premiers. Regardons ces nombres comme m tiroirs.

Prenons maintenant $m+1$ termes quelconque de la suite (u_n) on peut toujours le faire car il y a une infinité de termes dans la suite (u_n).

Puisque chaque terme est un produit de nombres premiers il peut être mis dans plusieurs tiroirs, les nombres premiers intervenant dans sa décomposition en facteurs premiers.

Dans un cas extrême chaque terme est dans un des tiroirs mais puisque il y a $m+1$ termes et m tiroirs il y a au moins deux termes dans le même tiroir ce qui signifie que deux termes de la suite ne sont pas premiers entre eux , ce qui est absurde.

A part la suite de Sylvester, la suite des nombres de Fermat vérifie cette propriété $(F_n = 2^{2^n} + 1)$

On peut aussi prendre une sous-suite de la suite de Fibonnacci ou une sous-suite de la suite de Mersenne car on a vu que

$pgcd(F_n, F_m) = F_{pgcd(m,n)}$ et aussi $pgcd(2^n - 1, 2^m - 1) = 2^{pgcd(m,n)} - 1$

Pour engendrer une sous-suite de termes premiers entre eux deux à deux, on peut prendre pour m et n des nombres de Sylvester ou de Fermat